/ /

تعريف الفضاء المتري : إذا زودنا المجموعة X غير الخالية أو أية مجموعة أخرى بمسافة أو بعد أو متريك d ونطلق عليها اسم فضاء متري أي يطلق على الثنائية أو الزوج المرتب (X,d) فضاء متري أو يقال X فضاءاً $X=(X,d)$
ونصطلح بتسمية عناصره نقاط ...
إن الشروط الأربعة التي تحققها المسافة d تعرف باسم موضوعات أو بديهيات الفضاء المتري، ولكي أي مثال علينا تحقيق جميع هذه الموضوعات أو البديهيات كيفما

تعريف الفضاء المتري الجزئي : إذا كانت $Y \subseteq X$ حيث المسافة بين عناصر Y كما هي في X تبرد أيضاً (Y,d) أو $d|Y$ فضاء متري تسمى هنا الثنائية (Y,d) فضاء مترياً جزئياً أي يصبح لدينا :

$$d : Y \times Y \longrightarrow R\,(R^+) \quad ; \quad x \geqslant 0$$

نتائج :

① المتراجحة التالية محققة :

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant d(x,x') + d(y,y')$$

وكحالة خاصة إذا أخذنا في هذه المتراجحة : $x' = Z \;;\; y' = y$ يكون

$$|d(x,y) - d(y,Z)| \leqslant d(x,Z) \quad ; \quad x,y,Z \in X$$

وتعطي هذه المتراجحة الواردة في التعريف المتراجحة المزدوجة التالية

$$|d(x,y) - d(y,Z)| \leqslant d(x,Z) \leqslant d(x,y) + d(y,Z)$$

②
عكس تعريف الشئ من تابع مسافة أو متريك على مجموعة واحدة $X \neq \phi$ وهذا يعني أن المجموعة X تتحول إلى فضاء متري بأكثر من طريقة

③
يمكن تعميم الموضوعة (4) من موضوعات المسافة باستخدام الاستقراء الرياضي فنجد :

$$d(x_1,x_n) \leqslant d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) \quad ; n \geqslant 2$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \; ; \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$$

Scanned by CamScanner

/ /

2. أمثلة على الفضاءات المترية والمسافات:

مثال 1: (المسافة العادية المألوفة أو الطبيعية)

$X = \mathbb{R}$ أو $X = \mathbb{C}$ ولنعرّف التطبيق $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

بالدستور $x, y \in \mathbb{R}$ ، $d(x,y) = |x-y|$

أو $d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$(z_1, z_2) \to d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|\ ;\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

الحل:

من السهل التحقق من أن d تشكل مسافة (أو متريك) على $\mathbb{R}$ ولنبدأ بالتحقق من موضوعات المسافة

والموضوعة الأولى محققة $x, y \in \mathbb{R}$; $|x-y| \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$ (1

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \quad ; x, y \in \mathbb{R}$

وموضوعة التطابق محققة

3) $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x) \quad ; x, y \in \mathbb{R}$

وموضوعة التناظر (التماثل) محققة:

4) $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$

$= d(x,y) + d(y,z) \ ,\ x, y, z \in \mathbb{R}$

ومتراجحة المثلث محققة

هذه المسافة أو المتريك تسمى مسافة أو متريك القيمة المطلقة أو المتريك المعتاد أو المألوف ونرمز له بـ $|\ |$ كما ونسمي الفضاء المألوف من $\mathbb{R}$ والمزودة بـ المسافة $|\ |$ الفضاء المتري الحقيقي المعتاد أو المألوف ونرمز له بـ $(\mathbb{R}, |\ |)$

والتقارب في هذا الفضاء هو التقارب العادي المعروف بالنسبة للمتتاليات العددية

مثال (2): المسافة المبتذلة أو التافهة:

لتكن X مجموعة غير خالية ولنعرف التطبيق d بالشكل:

$$d : X\times X \to \mathbb{R}$$

ويأخذ النحو التالي:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \\ 1 & ; \quad x \neq y \end{cases} \quad ; x, y \in X$$

الحل: يكفينا التحقق من أنّ d تحقق شروط المسافة أو المتري والتي تسمى أيضاً بالمسافة المتقطعة على X

ويمكن التحقق من الموضوعة الرابعة في الحالة التالية $x = y \neq z$ يكون

$$d(x, y) = 0 \quad , \quad d(x, z) = d(y, z) = 1$$

ومنه

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Leftarrow 1 \leq 0 + 1$$

ولو فرضنا جميعها متطابقة $x = z = y$ يكون $0 \leq 0 + 0$

ولو فرضنا جميعها مختلفة $x \neq z \neq y$ يكون $0 \leq 1 + 1$

إذاً هذا التطبيق أو التابع يعتبر مسافة لتحقق الموضوعات الأربعة وكما قلنا تسمى المسافة المبتذلة أو المتقطعة ومعرف على $\mathbb{R}$ أيضاً

سنطلق على الفضاء المتري (X, d) في هذه الحالة اسم فضاء النقاط المنعزلة أو المتقطعة (الفضاء المتقطع)

مثال (3):

نعرف التطبيق أو التابع التالي بالشكل:

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

حيث:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (1)$$

وعناصره $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$

لها الشكل $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

الحل:

تسمى هذه المسافة d بالمسافة الإقليدية على $\mathbb{R}^n$ ونسمي الفضاء المتري $(\mathbb{R}^n, d)$ حينئذ بالفضاء المتري الإقليدي نوني الأبعاد أو ذو الأبعاد n

ملاحظة:

1) ليكن $(\mathbb{R}^n, d)$ الفضاء الإقليدي نوني الأبعاد عندئذٍ:

أ) إذا كانت $n = 1$ فإن الفضاء الإقليدي ذي البعد واحد تتطابق مع الفضاء المتري الحقيقي المعتاد أو المألوف $(\mathbb{R}, |\,|)$ حيث $d(x, y) = |x - y|$

ب) وإذا كان $n = 2$ فإنّ الفضاء الإقليدي ذي البعدين يكون الفضاء المتري المعتاد أو المألوف $(\mathbb{R}^2, |\,|)$ أو الفضاء المتري العقدي

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \; ; \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \; y = (y_1, y_2)$$

وصانياً $n = 3$

ALSAMAH®

/ /

كما وجدلنا تعريف مسافات أخرى على $\mathbb{R}^n$ بالشكل

$$d_1(x,y) = e(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \quad ...(2)$$

وكذلك

$$d_2(x,y) = c(x,y) = \max\{ (x_k - y_k) ; 1 \le k \le n \} \quad ...(3)$$

وفي كل الأحوال يمكن إثبات كل من d_1, d_2 مسافة على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي نحصل على فضاءات مترية

جديدة.

من هذه المسافات نحصل على المتراجحة التالية

$$c(x,y) \le d(x,y) \le \sqrt{n}\; c(x,y)$$

(هامش: أصابة؟ ... المتراجحات)

وبنفس الطريقة يمكن تعريف هذه المسافات على $\mathbb{C}^n$ الفضاء الإقليدي ذي n بعد وكل عنصر منه n مركبة، والذي يسمى أحياناً فضاء الوحدة ذي n بعد، وهو فضاء كل المرتبات n من الأعداد العقدية، وعندما نضع $n=1$ فإننا نحصل على الفضاء المتري العقدي المألوف $(\mathbb{C}, d)$ مثلاً.

مثال (4)

لنفرض لدينا $X = C_{[0,1]}$ مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a,b]$ ولنعرف d على الشكل:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(f,g) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)| \; ; \; \forall f,g \in C_{[0,1]}$$

حيث

بين أن $(C_{[0,1]}, d)$ تمثل فضاءاً مترياً؟

الحل

لنبدأ بتحقق موضوعات المسافة أو المترية

$1^\circ)\; d(x,y) \ge 0 \Rightarrow d(f,g) \ge 0$

واضح أن

$2^\circ)\; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{0 \le x \le 1} |f-g| = 0 \Leftrightarrow |f-g| = 0 \; ; \forall x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f = g \; ;$

$3^\circ)\; d(f,g) = \sup_{0 \le x \le 1} |f-g| = \sup_{0 \le x \le 1} |g-f| = d(g,f) \; ; \; f,g \in C_{[0,1]}$

$4^\circ)\; |f-h| = |f-g+g-h| \le |f-g| + |g-h|$

$\sup_x |f-h| \le \sup_x |f-g| + \sup_x |g-h|$

/ /

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h) \; ; \; f,g,h \in C_{[0,1]}$$

متراجحة المثلث محققة

إذاً $(C_{[0,1]}, d)$ يمثل فضاءاً مترياً مع مسافة عليه

ملاحظة:

يمكننا أخذ مسافة أخرى على الفضاء أعلاه والموجودة $X = C_{[0,1]}$ على النحو التالي:

$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \; ; \; f,g \in C_{[0,1]}$$

حيث التكامل هنا هو تكامل حسب ريمان

أما لو [crossed out] كان التكامل حسب ليبيغ فموضوعة التطابق تكون غير محققة لأنه إذا كان التكامل يساوي الصفر ليس بالضرورة أن تكون الدالة تساوي الصفر //

وبالتالي الفضاء يكون في هذه الحالة شبه متري وليس متري

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \in [-1,0] \\ -1 & \in [0,1] \end{cases}$$

تكاملها يساوي الصفر ولكن $f(x) \neq 0$

تعريف شبه المسافة أو شبه المترية أو نصف المترية:

لتكن $X \neq \phi$ ويقال إن الدالة أو التابع

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ or } (\mathbb{R}^+)$$

إنه شبه مسافة أو شبه متري أو نصف مسافة على X إذا حققت الموضوعات أو البديهيات التالية:

1°) $d(x,y) \geq 0$: عدم السالبية

2°) $\text{if } x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$ موضوعة التطابق

3°) $d(x,y) = d(y,x)$ موضوعة التناظر

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ متراجحة المثلث

لجميع القيم $x,y,z \in X$ تسمى الثنائية (X,d) فضاء شبه متري أو شبه مسافة أو نصف)

نلاحظ من التعريف أن $d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$

إلا أن العكس صحيح

مثال: لنأخذ الدالة (أو التابع):

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; (\mathbb{R}^+)$$

$$d(x,y) = |x^2 - y^2| \; ; \; x,y \in \mathbb{R}$$

واضح أن d تحقق أعلاه شبه متري أو مسافة والعكس ليس صحيح (أي ليس فضاء متري) لأنه على سبيل المثال إذا كانت $x = -1$, $y = +1$

فإن $x \neq y$ إلا أن $d(x,y) = |1 - 1| = 0$

Scanned by CamScanner

/ /

وعليه فإن (IR, d) هو فضاء شبه متري وليس متري لأن الموضوعة الثانية غير محققة

تعريف الفضاء المتري المحدود :

ليكن (X,d) فضاء متري . نقول عن هذا الفضاء أنه محدود فيما إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب L بحيث : $0 \le d(x,y) \le L \; ; \; x,y \in X$

وعدا ذلك يكون الفضاء غير محدود

مثال :

لنفرض أن (X,ρ) فضاء متري ولنعرف الدالة : $d: X \times X \to IR \; (IR^+)$

بالشكل

$$d(x,y) = \frac{K \cdot \rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \; ; \; x,y \in X \; ; \; K > 0$$

هل (X,d) محدود أم لا ؟

الحل :

في هذا المثال يمكننا إثبات أن d هو مسافة وأن (X,d) فضاء متري كما فعلنا سابقاً ولنبين أنه محدود

واضح أنه

$$0 \le \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} < 1 \; ; \; \forall x,y \in X$$

وعليه فإن

$$0 \le d(x,y) = K \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} < K \cdot 1 = K \; , \; K > 0$$

أي أن (X,d) فضاءً محدوداً

- هل كل فضاء متري محدود ولماذا مع مثال ؟

بين أن فضاء المتتاليات المحدودة l_∞ هو فضاء متري ؟؟